Computerunterstützte Animation
Oberflächen-Rekonstruktion

Jörg Reiberg

28. Juni 1996

Zusammenfassung

Für die technisch-wissenschaftliche Visualisierung werden häufig dreidimensionale Modelle von realen Objekten benötigt. Wie im zweidimensionalen besteht auch hier die Möglichkeit, die Modelle per Hand zu zeichnen und zu konstruieren. Allerdings möchte man auch in 3D dieses Vorgehen durch Digitalisierung der Objekte automatisieren. Die Computer Tomographie (CT) ist besipielsweise eine Art der Digitalisierung: Auf der Basis von Röntgen-Schichtaufnahmen werden uniforme Volumenrasterungen erstellt. Eine andere Art von Rasterung liefern optische 3D Scanner: Sie tasten Oberflächenpunkte eines Objekts ab, und speichern deren Position und weitere Attribute wie Farbe, Wärme, Druck, etc.

Bei der Rekonstruktion müssen die diskreten Punkte solcher Digitalisierungen so verbunden werden, daß sich eine Approximation der Objektoberfläche ergibt. Zur stückweise linearen Approximation können dazu sogenannte Alpha-Shapes, eine Verallgemeinerung der konvexen Hülle, verwendet werden. Sie bestehen aus null- bis dreidimensionalen Simplizes: Punkten, Kanten, Dreiecken und Tetraedern. Zur Erzeugung einer C^0 bzw. C^1 stetigen Approximation der Oberfläche, werden die Alpha-Shapes zerteilt und die Teile durch polynomiale Flächen (Patches) ersetzt.

1 Einleitung

Um Bilder in 2D Graphik-Programmen zu erzeugen, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder man zeichnet das Bild mit Hilfe eines Mal- oder Layoutprogramms ab, oder man digitalisiert es mit einem Scanner oder einer Videokamera. Ähnliches gilt für die Erstellung von 3D Datenmodellen realer Objekte. Entweder man konstruiert ein Modell mit Hilfe eines CAD- oder Modellierungsprogramms, oder man digitalisiert es mit einem 3D Scanner oder beispielsweise per CT.

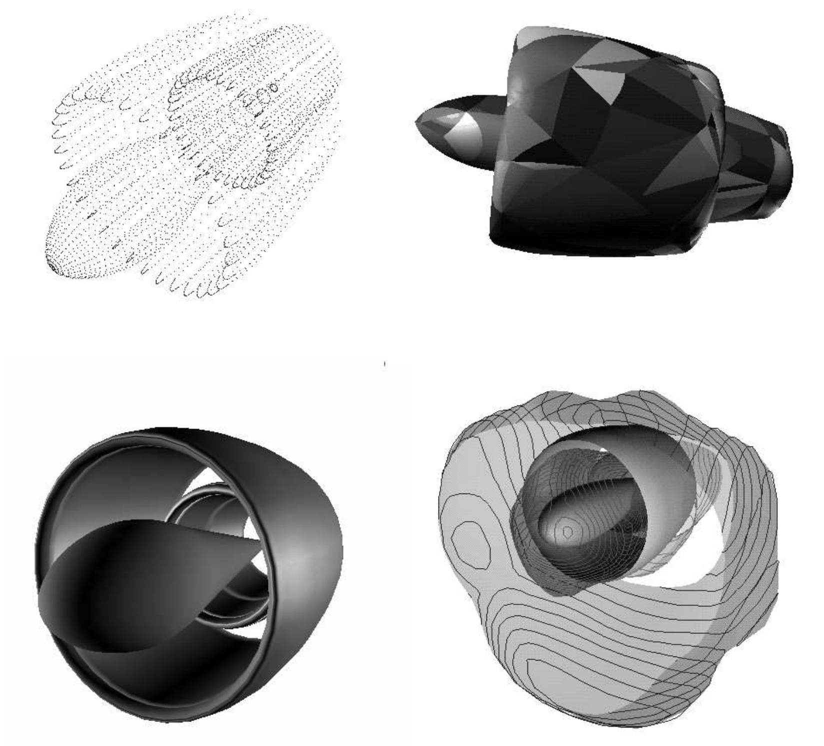


Abbildung 1: Flugzeugturbine (Punktwolke, Bézierflächen, Modell, Kraftfeld).

Dabei stellt sich das Problem die Oberfläche des Objekts zu rekonstruieren, denn leider handelt es sich bei den Daten nicht um die analytische Beschreibung des Objekts, sondern um eine diskrete, ungeordnete Rasterung des Objekts bzw. dessen Oberfläche.

Das Problem besteht also in der Berechnung einer in der Regel nichtplanaren, zweidimensionalen glatten Oberfläche im 3D anhand von diskreten

Stützpunkten. Eine weitere Aufgabe besteht darin, auf der Oberfläche des Objekts gemessene Werte, wie Farbe, Wärme, Druck o.ä., auf das Modell zu übertragen, d.h. skalare Felder im 3D zu berechnen.

Im folgenden zweiten Teil dieses Vortrags werden die grundlegenden geometrischen Hilfsmittel, wie *Delaunay-Triangulierung* und *Voronoi-Diagramm* kurz wiederholt. Im dritten Teil werden die zur stückweise-linearen Approximation benötigten *Alpha-Shapes* [EM94] vorgestellt und näher erläutert. Der vierte Teil beschäftigt sich mit der Approximation durch *Bernstein-Bézier Flächen*. Im fünften Teil wird das in [BBX95] vorgestellte dreistufige Verfahren zur Oberflächen-Rekonstruktion erläutert und Beispiele angeführt. Der letzte Teil faßt die gewonnenen Ergebnisse zusammen.

2 Geometrische Hilfsmittel

In den folgenden beiden Abschnitten werden die Begriffe Delaunay-Triangulierung und Voronoi-Diagramm (s. Abb. 2) erklärt.

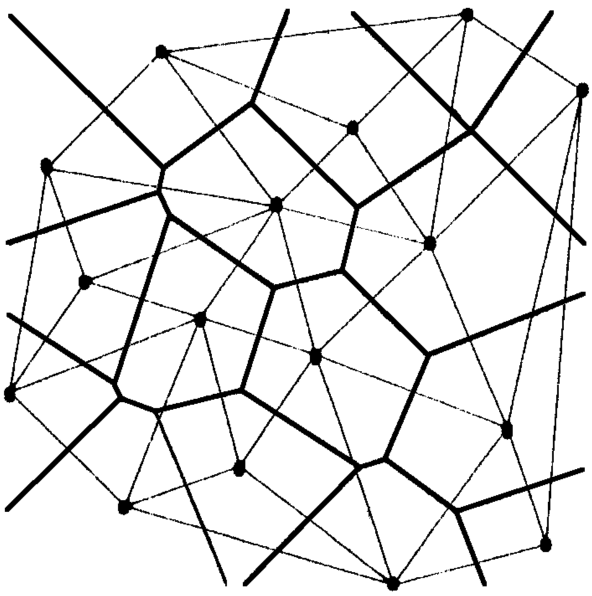


Abbildung 2: Delaunay-Triangulierung und Voronoi-Diagramm in 2D.

2.1 Delaunay-Triangulierung

Seien eine endliche Menge P von Punkten im $\mathbb{R}^3$ und eine Triangulierung $\mathcal{DT}$ der Punkte aus P gegeben. $\mathcal{DT}$ heißt die dreidimensionale Delaunay-

Triangulierung von P, wenn für alle Tetraeder $\sigma_i \in \mathcal{DT}$ die kleinste σ_i umfassende Kugel $b(\sigma_i)$ außer den Eckpunkten von σ_i keine weiteren Punkte aus P enthält. Schließt man degenerierte Fälle (drei oder mehr Punkte aus P sind kollinear) aus, so ist $\mathcal{DT}$ eindeutig. Zur effizienten Berechnung von $\mathcal{DT}$ gibt es viele verschiedene Algorithmen. Die Autoren des vorliegenden Papers entschlossen sich, den randomisierten inkrementellen "Flipping" Algorithmus aus [EM94] zu verwenden. In diesem Algorithmus wird eine history-DAG (directed acyclic graph) Datenstruktur aufgebaut. Wenn ein Tetraeder geteilt wird, oder Tetraeder "geflippt" werden, werden sie zu inneren Knoten des DAG, wohingegen neu hinzugefügte Tetraeder die Blätter des DAG werden. Um einen Punkt zu lokalisieren fängt man im Wurzelknoten an, und folgt den entsprechenden Kanten bis zu den Blättern.

Die allgemeine Komplexitätsanalyse der Delaunay-Triangulierung einer Menge von n Punkten im d-dimensionalen Raum ergibt eine worst-case Laufzeit von $O(n \log n + n^{\lceil d/2 \rceil})$. Bei der Benutzung des Algorithmus für den zwei- und dreidimensionalen Fall hat sich diese Schranke in der Praxis als zu pessimistisch erwiesen. Dies hängt jedoch auch wesentlich von der Verteilung der Punkte ab.

2.2 Voronoi-Diagramm

Das Voronoi-Diagramm $\mathcal{VD}$ beschreibt eine konvexe Partition des Raumes. Es ist aus der Algorithmischen Geometrie auch als Dual zur Delaunay-Triangulierung bekannt. Daher ist es auch einfach zu bestimmen, wenn man die Delaunay-Triangulierung bereits kennt.

Eine klassische Anwendung des Voronoi-Diagramms ist das *Post-Office Problem*: Gegeben sei eine Menge P von Postämtern und ein Anfragepunkt a. Es ist das Postamt $p_i \in P$ zu ermitteln, welches a am nächsten liegt. Mit jedem Postamt $p_i \in P$ wird genau eine konvexe Zelle $v_i \in \mathcal{VD}$ assoziiert, die die Eigenschaft hat, daß alle Punkte $q \in v_i$ einen geringeren Abstand zu p_i haben, als zu jedem anderen Punkt $p_j \in P, i \neq j$. Zur Lösung des Problems braucht man also nur die Voronoi-Zelle v_i finden, in der der Anfragepunkt a liegt. Diese Anfrage ist mit einer geeigneten Datenstruktur, dem RPO-Tree (randomized post office) in $O(\log n)$ Zeit möglich. Der RPO-Tree läßt sich in $O(n^{2+\epsilon})$ Zeit aus dem Voronoi-Diagramm aufbauen. In Phase I der Rekonstruktionsmethode (5.1) wird diese Datenstruktur zur Punktlokalisation und zur Berechnung von vorzeichenbehafteten Entfernungen benötigt.

3 Alpha-Shapes

Der geometrische Begriff der "Form" (Shape) eines Objekts hat im Gegensatz zu anderen Begriffen, wie Durchmesser oder Volumen, keine eindeutige formale Definition.

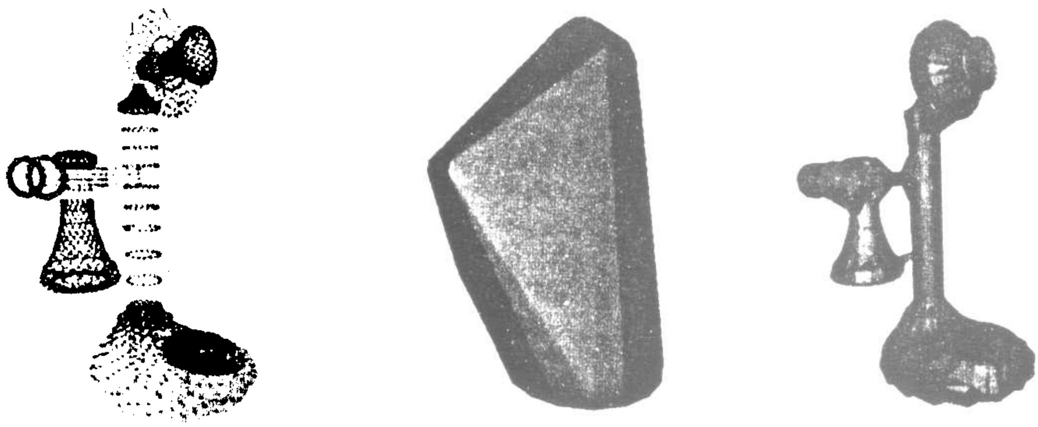


Abbildung 3: Punktwolke, konvexe Hülle und Alpha-Shape.

Ein formal eindeutig definierter Begriff ist z.B. die konvexe Hülle einer Punktmenge. Betrachtet man die konvexe Hülle einer großen Zahl von Stützpunkten auf der Objektoberfläche, so kommt dies der Oberfläche bei vielen Objekten recht nahe. Leider gehen dabei nicht-konvexe Teile wie Vertiefungen oder Henkel verloren, so daß die konvexe Hülle zur allgemeinen Beschreibung der Form eines Objekts nicht ausreicht (s. Abb. 3). Deswegen betrachtet man sogenannte *Alpha-Shapes*, eine Verallgemeinerung der konvexen Hülle einer Punktmenge und durch den Wert α parametrisierte Teilmenge der Delaunay-Triangulierung. Wir werden sehen, daß sie bei genügend vielen Oberflächen-Stützpunkten und günstig gewähltem Parameter α eine recht gute, stückweise lineare Rekonstruktion der Oberfläche eines Objekts sind.

Andere Graph-Strukturen, die ebenfalls zur Oberflächen-Rekonstruktion verwendet werden können, sind die in [JT92] erläuterten Gabriel-Graphen, Relative-Nachbarschafts-Graphen, sowie das β-Skeleton, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird.

3.1 Definitionen

Im folgenden sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine endliche Menge von Punkten.

3.1.1 α-Kugeln

Für $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \infty$ sei eine *α-Kugel* b_α eine offene Kugel mit Radius α, d.h. $b_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - p| < \alpha, p \in \mathbb{R}^3\}$. Für die Vollständigkeit sei die 0-Kugel ein Punkt und die ∞-Kugel ein offener Halbraum.

Eine α-Kugel heißt *leer*, wenn $b_\alpha \cap S = \emptyset$.

3.1.2 k-Simplizes

Jede Teilmenge $S \supseteq T = \{p_1, \dots, p_{k+1}, p_i \in S\}$, der Größe $|T| = k + 1, 0 \leq k \leq 3$, definiert einen k-Simplex σ_T, das die konvexe Hülle $conv(T)$ repräsentiert. Dies sind für die möglichen $k = 0, \dots, 3$ der Punkt p_1, die Linie $\overline{p_1 p_2}$, das Dreieck Δ_{p_1,p_2,p_3} und der Tetraeder τ_{p_1,p_2,p_3,p_4}.

Ein k-Simplex σ_T keißt *α-offen*, falls es eine α-Kugel b_α gibt, so daß $T = \partial b \cap S$, wobei ∂b der Rand der offenen α-Kugel b_α ist.

3.1.3 α-Shape

Für ein festes α bezeichne $F_{k,\alpha}$ die Menge aller α-offenen k-Simplizes. Das *α-Shape* von S, bezeichnet mit $\mathcal{S}_\alpha$, ist das Polytop dessen Rand aus den Dreiecken aus $F_{2,\alpha}$, den Kanten aus $F_{1,\alpha}$ und den Ecken aus $F_{0,\alpha}$ aufgebaut ist. Die k-Simplizes aus den $F_{k,\alpha}$ nennt man auch k-Seiten von $\mathcal{S}_\alpha$.

3.1.4 Singuläre, reguläre und innere Simplizes

Nun bleibt noch festzulegen, welche Gebiete aus $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\mathcal{S}_\alpha$ zum Innern des Alpha-Shapes $\mathcal{S}_\alpha$ gehören, und welche außerhalb liegen. Diese Festlegung erfolgt über eine Charakterisierung der Dreiecke aus $F_{2,\alpha}$:

Für einen festen Wert α gibt es zu jedem α-offenen Dreieck $\sigma_T \in \mathcal{S}_\alpha$ zwei (nicht notwendigerweise leere) α-Kugeln $b_1 \neq b_2$, so daß $T \subseteq \partial b_1$ und $T \subseteq \partial b_2$. Nun gibt es drei zu betrachtende Fälle:

1. b_1 und b_2 sind leer, dann nennt man σ_T *singulär*. Beide Seiten von σ_T zeigen nach außen und σ_T berandet $\mathcal{S}_\alpha$ nicht.

2. b_1 und b_2 sind nicht leer, dann nennt man σ_T im Innern von $\mathcal{S}_\alpha$.

3. Genau eine der α-Kugeln b_1 oder b_2 ist leer. Sei dies ohne Einschränkung b_1, dann ist $\sigma_T \subset \partial\mathcal{S}_\alpha$ und berandet somit $\mathcal{S}_\alpha$. Der Mittelpunkt von b_2 und das Innere von $\mathcal{S}_\alpha$ sind auf verschiedenen Seiten von σ_T.

Ecken aus $F_{0,\alpha}$ und Kanten aus $F_{1,\alpha}$ heißen singulär bzw. interior, wenn alle angrenzenden Dreiecke aus $F_{2,\alpha}$ singulär bzw. interior sind. Andernfalls heißen sie regulär. Tetraeder aus $F_{3,\alpha}$ heißen interior, wenn all ihre vier Seiten interior sind. Andernfalls heißen sie regulär. Singuläre Tetraeder gibt es nicht.

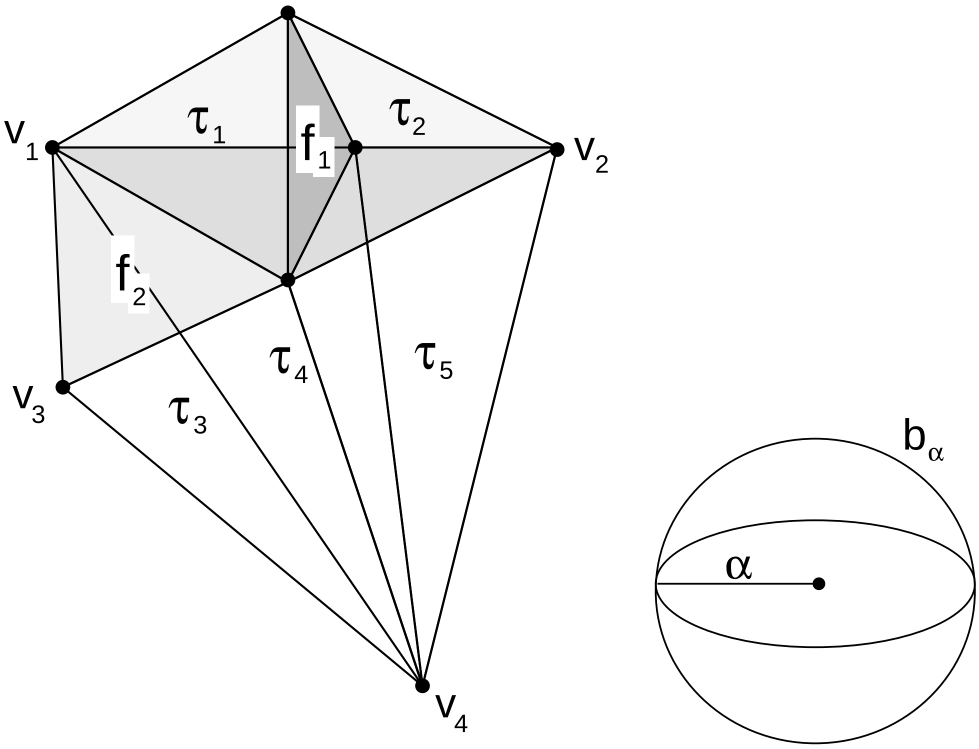


Abbildung 4: Simplizes und Alpha-Kugel.

In Abb.4 sieht man eine $\mathcal{DT}$ von 7 Punkten und eine α-Kugel b_α. Die Tetraeder τ_1 und τ_2 sind regulär, weil jeweils alle Seiten α-exposed jedoch (bis auf f_1) nicht innere Seiten sind. Die Tetraeder τ_3, τ_4 und τ_5 gehören nicht zu $\mathcal{S}_\alpha$, weil die ungefärbten Seiten nicht α-exposed sind. Die Fläche f_2 ist singulär, weil α-exposed und beide α-Kugeln leer.

3.2 Berechnung eines Alpha Shapes

Die Berechnung eines Alpha-Shapes $\mathcal{S}_\alpha$ einer Menge S dreidimensionaler Punkte erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird die Delaunay-Triangulierung $\mathcal{DT}$ von S bestimmt. $\mathcal{DT}$ wird umgeformt in eine Datenstruktur bestehend aus Punkten, Kanten, Dreiecken und Tetraedern. Im zweiten Schritt wird mit jedem dieser Simplizes σ ein reelles Intervall assoziiert, welches den Bereich von α angibt, für den der Simplex zum Alpha-Shape gehört. Im Detail werden drei Intervalle gebildet:

$$\begin{array}{lcl} I_1(\sigma) & = & (x_{sing_0}(\sigma), x_{sing_1}(\sigma)) \\ I_2(\sigma) & = & (x_{reg_0}(\sigma), x_{reg_1}(\sigma)) \\ I_3(\sigma) & = & (x_{int_0}(\sigma), x_{int_1}(\sigma)) \end{array}$$

$$0 \leq x_{sing_0}(\sigma) \leq x_{sing_1}(\sigma) \leq x_{reg_0}(\sigma) \leq x_{reg_1}(\sigma) \leq x_{int_0}(\sigma) \leq x_{int_1}(\sigma) \leq \infty$$

Woraus sich vier Wertebereiche für den Simplex ergeben:

$$\begin{array}{lcl} \alpha \in I_1(\sigma) & \Rightarrow & \text{Simplex } \sigma \text{ ist singulär} \\ \alpha \in I_2(\sigma) & \Rightarrow & \text{Simplex } \sigma \text{ ist regulär, d.h. } \sigma \in \partial S_\alpha \\ \alpha \in I_3(\sigma) & \Rightarrow & \text{Simplex } \sigma \text{ ist interior, d.h. } \sigma \in S_\alpha \setminus \partial S_\alpha \\ \text{sonst} & \Rightarrow & \text{Simplex } \sigma \text{ gehört nicht zu } S_\alpha \end{array}$$

Zur Visualisierung bzw. Weiterverarbeitung des Alpha-Shapes zu einem festen α, traversiert man die Datenstruktur und ermittelt alle Simplizes, die mit einem Intervall, welches α enthält, assoziiert sind.

4 Approximation mit Bézier Flächen

4.1 Baryzentrische Koordinaten

Seien a, b, $c \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Dann beschreiben diese Punkte ein Dreieck τ. Für jeden Punkt p aus τ gilt nun:

$p = ua + vb + wc$

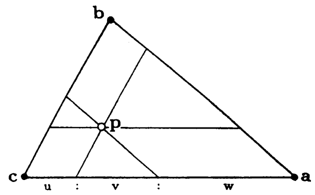


Abbildung 5: 2D Baryzentrische Koordinaten.

u, v, w sind die *baryzentrische Koordinaten* von p bzgl. a, b, c mit $u+v+w = 1$.

Die Definition baryzentrischer Koordinaten kann man auf beliebige Dimensionen erweitern. Die Summe der baryzentrischen Koordinaten eines Punkts ist dabei immer eins, weil er konvex Kombination der Punkte aus τ ist. Interessant ist für uns natürlich der dreidimensionale Fall. Dort beschreiben vier linear unabhängige Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 einen Tetraeder τ. Jeder Punkt p aus τ kann dann geschrieben werden als

$$p = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i p_i \in \tau \quad , \gamma_i \text{ baryzentrische Koordinaten von } p \text{ bzgl. } p_i, \quad i = 1 \ldots 4.$$

Die Beziehung zwischen den kartesichen Koordinaten $p = (x, y, z)$ und den baryzentrischen Koordinaten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und γ_4 wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}$$

4.2 Bernstein-Bézier Formen

Seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und τ der durch sie definierte Tetraeder. Dann kann ein Polynom $f(p), \quad p \in \tau$ vom Grad n wie folgt als sogenannte *Bernstein-Bézier Form* definiert werden:

$$f(p) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\gamma), \quad \lambda \in \mathbb{Z}_+^4$$

wobei $B_\lambda^n(\gamma) = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!}\gamma_1^{\lambda_1}\gamma_2^{\lambda_2}\gamma_3^{\lambda_3}\gamma_4^{\lambda_4}$ Bernstein Polynom

und $|\lambda| = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ mit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ ist baryzentrische Koordinate von p.

$b_\lambda = b_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ heißen *Bézier-Ordinaten.*

$p_\lambda = \frac{\lambda_1}{n}p_1 + \frac{\lambda_2}{n}p_2 + \frac{\lambda_3}{n}p_3 + \frac{\lambda_4}{n}p_4, \quad |\lambda| = n$ heißen *reguläre Punkte* von τ.

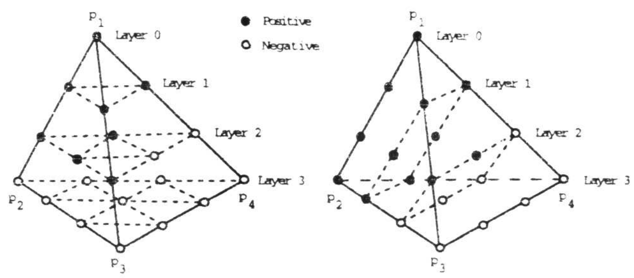


Abbildung 6: Reguläre Punkte mit pos./neg. Bézier-Ordinaten.

4.3 Least-Squares Approximation

Zur Approximation von höhergradigen Kurven oder Oberflächen durch eine Kurve oder Oberfläche niedrigeren Grades wird häufig die Least-Squares-Methode verwendet. In diesem Abschnitt wird die Approximation niedrigeren Grades von Bézier-Kurven und -Flächen erläutert.

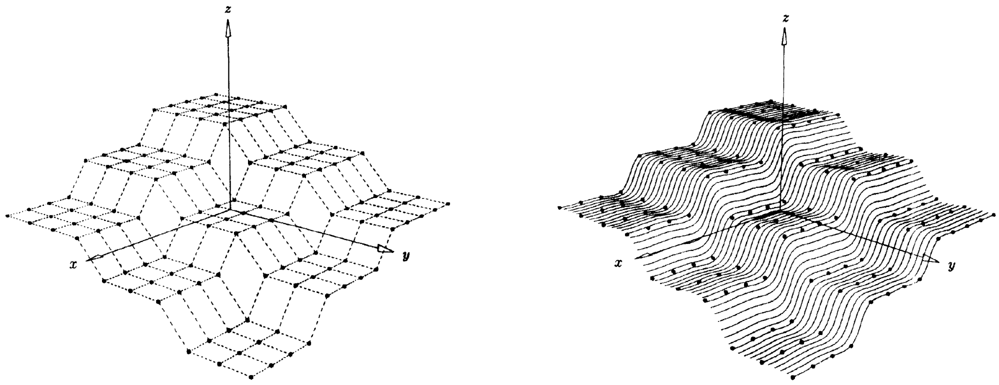


Abbildung 7: Rasterpunkte und interpolierende höhergradige Fläche.

4.3.1 Univariate Approximation

Sei p(t) ein Polynom n-ten Grades in Bernstein-Basisform:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j B_j^n(t)$$

wobei die Bernstein-Basisfunktionen B_j^n wie folgt definiert sind:

$$B_j^n(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^i (1-t)^{n-j}$$

Man möchte nun $q(t)$, ein Polynom m-ten Grades ($m \leq n$), berechnen, welches $p(t)$ unter einem festgelegten Maß für den Approximations-Fehler am besten approximiert (s. Abb. 8). Die Least-Squares-Methode legt ein solches Maß fest. Man definiert dazu das Residuum R als durchschnittliche quadratische Differenz von $p(t)$ und $q(t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$:

$$R = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{m} q_j B_j^m(t) - \sum_{j=0}^{n} p_j B_j^n(t) \right)^2 dt$$

Für ein festes $p(t)$ ist R ein quadratischer Ausdruck mit den Koeffizienten q_j. Das Minimum von R liegt dort, wo alle Ableitungen $\partial/\partial q_i$ verschwinden, d.h. wo

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} q_j B_i^m(t) B_j^m(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} p_j B_i^n(t) B_j^n(t) dt \quad \forall 0 \le i \le m$$

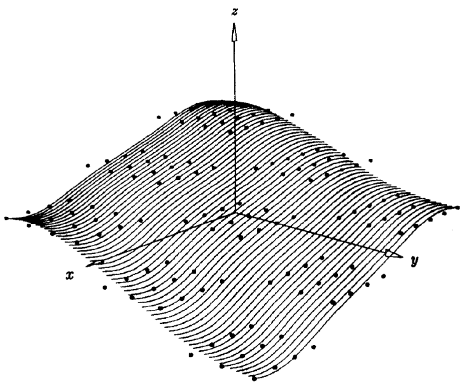
Benutzt man die Produkt- und Integralregeln für Bernstein-Polynome [F94], so führt dies zu folgender Gleichung:

$$Aq = Bp$$

wobei $A \in Mat(m+1, m+1)$ und $B \in Mat(m+1, n+1)$. In der Praxis sind der Grad von p und q fest, wodurch man $A^{-1}B$ im Voraus berechnen kann.

4.3.2 Multivariate Approximation

Ein etwas schwierigeres Problem als die univariate Approximation ist die multivariate Approximation. Es wird vesucht, statt eine Kurve durch eine Kurve kleineren Grades zu approximieren, eine d-dimensionale Oberfläche vom Grad n durch eine d-dimensionale Oberfläche vom Grad m ($m \le n$) zu approximieren (s. Abb. 7+8).



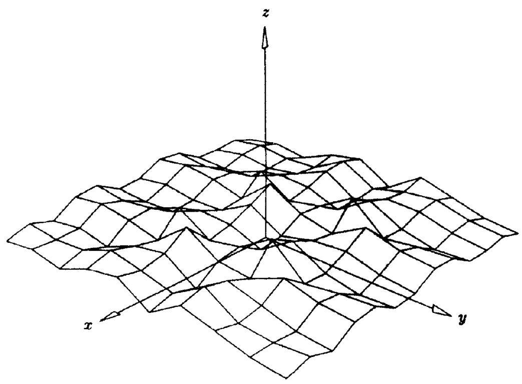


Abbildung 8: Kubische Bézier-Fläche und Fehler bzgl. Fläche aus Abb. 7.

Der Ansatz ist der gleiche wie bei der univariaten Approximation. Es müssen allerdings größere Gleichungssysteme gelöst werden [MW91]. Die Matrizen sind jedoch meißt dünn besetzt, was eine zeit- und speicherplatzsparende Implementierung ermöglicht.

5 Drei-Phasen Oberflächen-Rekonstruktion

Im folgenden wird ein Verfahren zur Oberflächen-Rekonstruktion vorgestellt. Es gliedert sich in drei Phasen. In Phase I wird eine stückweise lineare Approximation der Oberfläche berechnet. In Phase II wird der Raum inkrementell in immer kleinere Tetraeder zerteilt, auf denen dann trivariate Bernstein-Bézier Approximationen der Alpha-Shape-Teile in diesen Tetraedern berechnet werden. Phase III führt eine Verfeinerung dieser Unterteilung durch, so daß die Patches auch an den Rändern der Tetraeder C^1-stetig werden.

5.1 Phase I

Für die gegebenen Oberflächenpunkte wird die $\mathcal{DT}$ berechnet, aus der dann ein geeignetes Alpha-Shape konstruiert wird. Außerdem wird aus der $\mathcal{DT}$ das $\mathcal{VD}$ berechnet, so daß eine effektive vorzeichenbehaftete Abstandsberechnung von Punkten zum Alpha-Shape möglich ist.

5.2 Phase II

Zunächst wird ein Tetraeder gewählt, der alle Oberflächenpunkte enthält. Für diesen Tetraeder wird eine trivariate Bernstein-Bézier Approximation des Alpha-Shapes mit der Least-Squares-Methode berechnet.

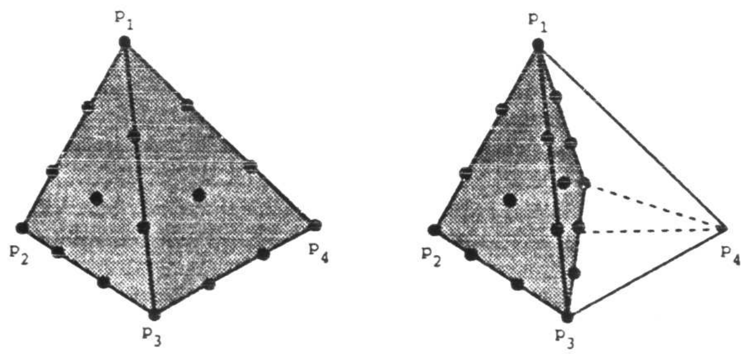


Abbildung 9: "Splitting" eines Tetraeaders in 4 Unter-Tetraeder.

Jeder Tetraeder wird inkementell in weitere Tetraeder unterteilt (s. Abb. 9), wobei jedesmal der Schwerpunkt des Tetraeders als neuer Punkt hinzukommt und die Delaunay-Eigenschaft wenn nötig mit "Flipping" wiederhergestellt wird. Diese inkrementelle Unterteilung wird solange fortgesetzt, wie eine der folgenden Bedingungen zutrifft:

1. Der Approximationsfehler der Least-Squares-Methode ist größer als eine vorgegebene Schranke.

2. Die Ordinaten eines Layers haben unterschiedliche Vorzeichen (s. Abb. 6) - anschaulich ist die Fläche in diesem Fall "gefaltet".

5.3 Phase III

In der letzten Phase werden die Tetraedrer weiter unterteilt, der Grad der Bézier-Formen erhöht und deren Gradienten gemittelt. Je nach Unterteilung wird ein kubischer oder quintischer Grad gewählt, um eine C^1-Stetigkeit der Flächen an den Nahtstellen zu Nachbarflächen zu gewährleisten. Hierauf wurde im vorliegenden Paper jedoch nicht näher eingegangen.

5.4 Beispiele

Zunächst ein 2D Beispiel (s. Abb. 10). Es wird der Buchstabe S anhand von Randpunkten rekonstruiert:

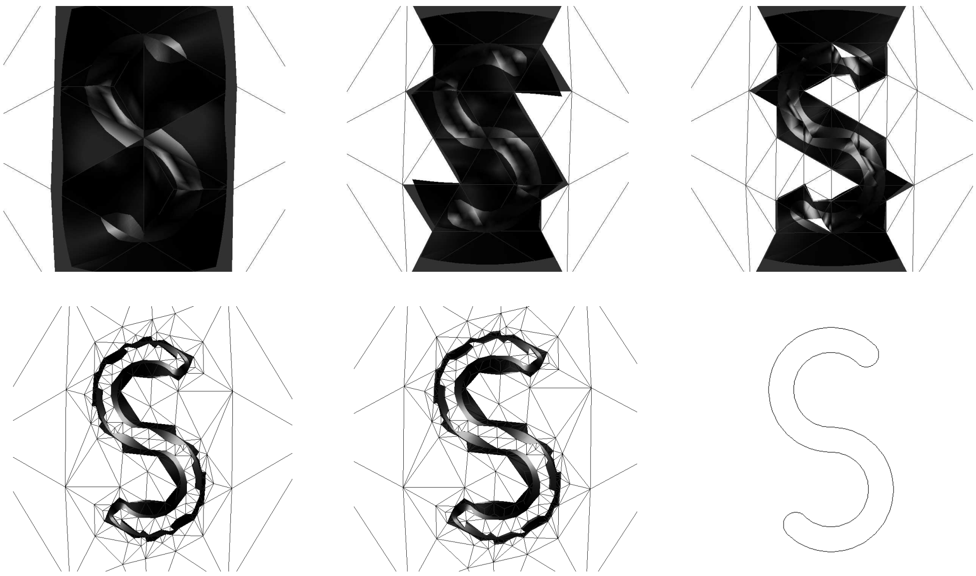


Abbildung 10: Rekonstruktion einer 2D Kurve.

Die drei oberen Bilder zeigen Schritte der Phase II, die zwei Bilder links unten die Schritte der Phase III und das Bild rechts unten die zu rekonstruierende Kurve.

Im zweiten Beispiel wird aus einem CT-Scan die 3D-Oberfläche eines Oberschenkelknochens rekonstruiert (s. Abb. 11):

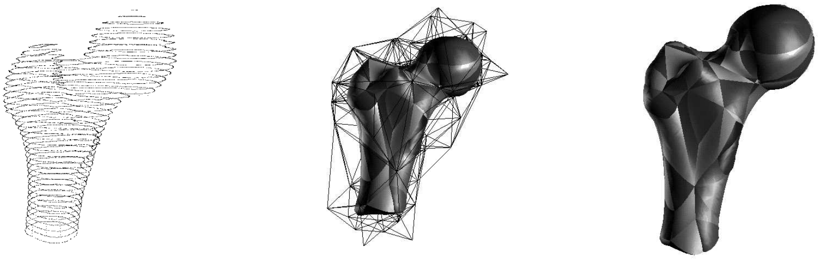


Abbildung 11: Rekonstruktion eines Oberschenkelknochens.

Im linken Bild sind die 9223 Samples des CT-Scans zu sehen. Daneben die letzte Unterteilung der Tetraeder und rechts schließlich das rekonstruierte Objekt bestehend aus 400 kubischen Patches.

Ein weiteres Beispiel ist am Anfang des Vortrags in Abb. 1 zu sehen. Oben links eine Menge von 9800 Punkten. Daneben die verschieden gefärbten Oberflächen-Patches. Unten links sieht man die entgültige Rekonstruktion bestehend aus 382 kubischen Patches. Parallel zur Berechnung der Oberfläche wurde eine Approximation eines skalaren Feldes berechnet: Für jeden Oberflächenpunkt in den Ausgangsdaten ist ein skalarer Wert, namentlich der Druck in angegebenem Punkt, gegeben. Im Bild unten rechts in Abb. 1 sind diese Druckwerte visualisiert: Zu jedem Oberflächenpunkt wurde parallel mit der Oberflächen-Rekonstruktion ein Kraftfeldpunkt erzeugt, dessen Position senkrecht um den Betrag der Kraft von zugehörigem Oberflächenpunkt entfernt ist.

6 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, wie man aus diskreten 3D Messwerten Oberflächen von Objekten rekonstruieren kann. Wir haben dabei eine formale Definition der "Form" eines Objekts kennengelernt, die Alpha-Shapes. Man mag sich fragen, warum man noch eine Polynomiale Approximation benötigt, wenn man durch dichte Rasterdaten eine sehr genaue Rekonstruktion mit einem Alpha-Shape erreicht. Die polynomiale Approximation hat zwei Vorteilev: Erstens kann man nachträglich die Modelle einfacher verformen [F94] und zweitens wird durch die analytische Darstellung die Datenmenge in der Regel reduziert.

Zum Paper [BBX95] sind Bilder und Software elektronisch unter folgender Adresse abrufbar:

`http://www.cs.purdue.edu/homes/fxb/ShastraWWW/advertising/` ↩
`projects/reconstruction/reconstruction.html`

Literatur

[BBX95] C.L. Bajaj, F. Bernardini und G.Xu.
Automatic Reconstruction of Surfaces and Scalar Fields from 3D Scans.
Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '95), pp. 109-118, 1995.

[EM94] H. Edelsbrunner und E.P. Mücke.
Three-Dimensional Alpha Shapes.
ACM Transactions on Graphics, pp. 43-72, Vol. 13, No. 1, January 1994.

[F94] G. Farin.
Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design.
Vieweg, 1994.

[PT95] L. Piegel und W. Tiller.
The NURBS Book.
Springer Verlag, 1995.

[MW91] D. Moore und J. Warren.
Least-Squares Approximations to Bézier Curves and Surfaces.
In: A.S. Glassner (Ed.), *Graphics GEMS II*, pp. 406-411. Academic Press, 1991.

[JT92] J.Q. Jaromczyk und G.T. Toussaint.
Relative neighborhood graphs and their relatives.
Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 9, pp. 1502-1517, 1992.